$$
\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "{_C M_B(f)}"] \arrow[dr, "\varphi_B"] & & & K^m \arrow[dl, "\varphi_C"', "\cong"] \arrow[ddd, "{_{C'}M_C(\mathrm{id})}"] \\
& V \arrow[r, "f"] & W & \\
& & & \\
K^n \arrow[uuu, "{_B M_{B'}(\mathrm{id})}"] \arrow[uur, "\varphi_{B'}"', "\cong"] \arrow[rrr, "{_{C'}M_{B'}(f)}"'] & & & K^m \arrow[uul, "\varphi_{C'}", "\cong"']
\end{tikzcd}
$$

Wie berechnet man

$${_{C'}M_C(\mathrm{id})} \text{ und } {_B M_{B'}(\mathrm{id})}?$$

Option A: mit Satz 7.4

z.B.: ${_B M_{B'}(\mathrm{id})} = (m_{ij})$ für die Koeffizienten m_{ij}, die bestimmt sind durch

$$\underline{b}'_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} \underline{b}_i$$

für $B' = (\underline{b}'_1, \dots, \underline{b}'_n)$

$B = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$

Option B: Wenn V, W als UVR von K^N, K^M gegeben sind mit folgendem Rezept 7.8.

Rezept 7.8: Basiswechsel für lineare Abb. zwischen UVR der Standardräume

$V \subseteq K^N$ UVR der Dimension n
$W \subseteq K^M$ UVR der Dimension m

B, B' Basen von V
C, C' Basen von W } Basisvektoren gegeben als Vektoren in K^N bzw. K^M.

$f: V \longrightarrow W$ lineare Abb.

Gegeben: ${}_C M_B(f)$
Gesucht: ${}_{C'} M_{B'}(f)$

SCHRITT 1:
Fasse B und B' auf als $N \times n$-Matrix,
C und C' auf als $M \times m$-Matrix

SCHRITT 2:
Finde Linksinverse L_B zu B,
$L_{C'}$ zu C',

z.B. mit Rezept 6.29!

SCHRITT 3:

$${}_{C'} M_{B'}(f) = L_{C'} \cdot C \cdot {}_C M_B(f) \cdot L_B \cdot B'$$

Fertig.

$$
\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrrr, "{}_C M_B(f)"] \arrow[d, "B"'] \arrow[dr, "\varphi_B", "\cong"'] & & & & K^m \arrow[dl, "\varphi_C"', "\cong"] \arrow[d, "C"] \\
K^N \arrow[u, dashed, bend left, "L_B"] & V \arrow[l, hook', "i"] \arrow[rr, "f"] & & W & K^M \arrow[l, hook', "j"] \arrow[d, dashed, bend left, "L_{C'}"] \\
K^n \arrow[u, "B'"] \arrow[ur, "\varphi_{B'}"', "\cong"] \arrow[rrrr, "{}_{C'} M_{B'}(f)"'] & & & & K^m \arrow[u, "C'"'] \arrow[ul, "\varphi_{C'}", "\cong"']
\end{tikzcd}
$$

Beweis: Linksinverse existieren, da die Matrizen B, B', C, C' jeweils vollen Spaltenrang haben.
(weil die Spalten l. u. sind, weil die Spalten Basen sind von UVR, siehe Sätze 6.35 & 6.36).

Es ist nur noch zu zeigen

① $\;{}_{C'}M_C(\mathrm{id}) = L_{C'} \cdot C$ und

② $\;{}_{B}M_{B'}(\mathrm{id}) = L_{B} \cdot B'$

①: Es ist $\quad L_B \cdot B = \mathbb{1}_n$

bzw. $\quad f_{L_B} \circ \underbrace{f_B}_{\text{siehe Notation 7.2}} = \mathrm{id}_{K^n}$, also

$$f_{L_B} \circ (i \circ \varphi_B)$$
$$\shortparallel$$
$$(f_{L_B} \circ i) \circ \varphi_B .$$

Da φ_B Iso ist folgt:

$$f_{L_B} \circ i = \varphi_B^{-1}.$$

Daher $\quad f_{L_B} \circ \underbrace{i \circ \varphi_{B'}} = \varphi_B^{-1} \circ id \circ \varphi_{B'}$

also $\quad f_{L_B} \circ f_{B'} = \varphi_B^{-1} \circ id \circ \varphi_{B'}$

also $\quad L_B \cdot B' = {}_B M_{B'}(id)$

(2): genauso. $\square$

Beispiel zu Rezept 78:

(Tutorium 17.01.2021)

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x = y \right\} \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y = -z \right\}$$

mit Basen

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$B' = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad C' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right)$$

Gegeben sei $f: V \longrightarrow W$ mit

$${}_C M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Gesucht: ${}_{C'} M_{B'}(f)$

SCHRITT 1:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[rrr, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"'] \arrow[dr, "\varphi_B", "\cong"'] & & & \mathbb{R}^2 \arrow[dl, "\varphi_C"', "\cong"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"] \\
\mathbb{R}^3 \arrow[u, dashed, bend left, "L_B"] & V \arrow[l, hook, "i"] \arrow[r, "f"] & W \arrow[r, hook, "j"] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, dashed, bend left, "L_{C'}"] \\
\mathbb{R}^2 \arrow[u, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[ur, "\cong", "\varphi_{B'}"'] \arrow[rrr, "{}_{C'} M_{B'}(f)"'] & & & \mathbb{R}^2 \arrow[ul, "\cong"', "\varphi_{C'}"] \arrow[u, "\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}"']
\end{tikzcd}$$

SCHRITT 2:

L_B:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ 0 & 1 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$L_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Probe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

)

$L_{C'}$:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{2} \\ \cdot(-2) \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{2} \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & \boxed{\frac{1}{2}} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ 0 & 1 & \boxed{0} & \boxed{-2} & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_{C'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(Probe:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

)

SCHRITT 3:

$${}_{C'}M_{B'}(f)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$